第 15 章　概率

15.1　样本空间和随机事件

1. C　【解析】由 A,B 两盏正常的小灯泡组成并联电路，当闭合开关时，可知 A,B 两盏灯均亮. 故选 C.

2. A　【解析】对于 A，袋子中装有 8 个红球，2 个白球，摸出的 3 个球都是白球是不可能发生的，故 3 个都是白球为不可能事件；

对于 B，摸出的 3 个球都是红球为随机事件；

对于 C，袋子中只有 2 个白球，摸出的 3 个球至少有 1 个红球为必然事件；

对于 D，摸出的 3 个球至多有 2 个白球是必然事件. 故选 A.

3.【解】(1)“从左到右这三个位置”记为 1,2,3，则这个试验的样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$，其中第 1 个数表示甲坐的位置号，第 2 个数表示乙坐的位置号.

(2)由(1)知这个试验的样本点总数是 6.

(3)事件“甲、乙相邻”包含 4 个样本点：(1,2)，(2,1)，(2,3)，(3,2).

事件“甲在乙的左边(不一定相邻)”包含 3 个样本点：(1,2)，(1,3)，(2,3).

4. D　【解析】因为事件 $A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$，所以共包含 6 个样本点. 故选 D.

5. B　【解析】$A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 所表示的含义是 A_1,A_2,A_3 这三个事件中至少有一个发生，即可能击中 1 发、2 发或 3 发. 故选 B.

6. C　【解析】对于 A，$C_5=\{$点数为 5$\}$，$C_6=\{$点数为 6$\}$，而 $D_3=\{$点数大于 5$\}$

表示出现 6 点，易知 $D_3=C_6$，故 A 不正确；

对于 B，$D_1=\{$点数不大于 2$\}$，$D_2=\{$点数不小于 2$\}$，当出现的点数是 2 时，D_1 与 D_2 同时发生，故 B 不正确；

对于 C，$D_3=\{$点数大于 5$\}$ 表示出现 6 点，$F=\{$点数为偶数$\}$，所以 D_3 发生 F 一定发生，所以 $D_3\subseteq F$，故 C 正确；

对于 D，$D_1\cap D_2$ 表示两个事件同时发生，即出现 2 点，$E=\{$点数为奇数$\}$，所以 $D_1\cap D_2$ 发生，事件 E 不发生，所以 $E\supseteq(D_1\cap D_2)$ 不正确，故 D 不正确. 故选 C.

7.【解】(1)这个试验的基本事件一共有 16 个，分别为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4).

(2)事件“出现点数之和大于 3”包含以下 13 个基本事件：(1,3)，(1,4)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4).

(3)事件“出现点数相等”包含以下 4 个基本事件：(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4).

8.【解】(1)$A\cap B=\varnothing$，

$B\cap C=$“出现 2 点”.

(2)$A\cup B=$“出现 1,2,3,4,5 或 6 点”，

$B\cup C=$“出现 1,2,4 或 6 点”.

9.【解】(1)这个试验的所有可能的结果为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(1,5)，(1,6)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(3,5)，(3,6)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)，(4,5)，(4,6)，(5,1)，(5,2)，(5,3)，(5,4)，(5,5)，(5,6)，(6,1)，(6,2)，(6,3)，(6,4)，(6,5)，(6,6).

(2)由(1)知这个试验共有 36 种不同

的结果.

(3)记"出现的点数之和大于 8"为事件 A,则 $A=\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

(4)记"出现的点数相同"为事件 B,则 $B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

10. BC　【解析】对于一个随机试验,其所有可能的结果的集合称为样本空间,样本空间的元素称为样本点,随机事件是样本空间的一个子集.

所以有 $\omega\in\Omega$ 和 $A\subseteq\Omega$. 故选 BC.

15.2　随机事件的概率

课时 1　古典概型

1. A　【解析】设孩子是男孩记为 a,孩子为女孩记为 A,则样本点为 $aaa,aaA,aAa,Aaa,aAA,AaA,AAa,AAA$,共 8 个,其中都是男孩的样本点为 aaa,共 1 个,故 3 个孩子都是男孩的概率 $P=\frac{1}{8}$,故选 A.

2. B　【解析】甲、乙、丙三人出场顺序有甲乙丙,甲丙乙,乙甲丙,乙丙甲,丙甲乙,丙乙甲,共 6 种,

其中乙比丙先出场的出场顺序有甲乙丙,乙甲丙,乙丙甲,共 3 种(提示:在乙甲丙的出场顺序中,虽然乙丙不是连续出场,但是也满足乙比丙先出场的条件限制),

所以乙比丙先出场的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

故选 B.

3. D　【解析】抛掷质地均匀的硬币 2 次的所有可能的结果有(正,正),(正,反),(反,正),(反,反),

其中恰好出现 1 次正面向上的结果有(正,反),(反,正),

据此可得恰好出现 1 次正面向上的概率 $P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

4. A 【解析】设乙领到 i 元,丙领到 j 元,丁领到 k 元,则可用 (i,j,k) 表示 1 个样本点,$\Omega=\{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$,所以样本点总数 $n(\Omega)=6$. 设乙获得"最佳手气"为事件 A,则 A 包含的样本点有 $(3,1,1),(2,1,2),(2,2,1)$,共 3 个,即 $n(A)=3$,

故 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

5. D 【解析】随机抛掷两枚质地均匀的骰子的所有可能的结果如下表:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

共 36 种等可能的不同结果.

得到的两个骰子的点数之和能被 3 整除的有 $(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)$,共 12 种,

所以所求概率为 $P=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$. 故选 D.

6. B 【解析】根据题意,列表如下:

B \ A	红 1	红 2	白
白 1	(白 1,红 1)	(白 1,红 2)	(白 1,白)
白 2	(白 2,红 1)	(白 2,红 2)	(白 2,白)
红	(红,红 1)	(红,红 2)	(红,白)

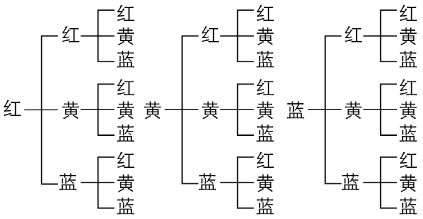
由上表可知,共有 9 种等可能的结果,其中颜色不相同的结果有 5 种,颜色

相同的结果有 4 种.

若摸出球的颜色相同,则 A,B 袋中球的颜色没有变化,若摸出球的颜色不相同,则 A,B 袋中球的颜色发生变化.

设小明获胜为事件 A,小华获胜为事件 B,则 $P(A)=\frac{4}{9}$,$P(B)=\frac{5}{9}$,由于 $\frac{4}{9}<\frac{5}{9}$,故小华获胜概率大. 故选 B.

7. $\frac{1}{9}$　$\frac{2}{9}$　【解析】所有可能的样本点共有 27 个,如图所示.



记“3 个矩形颜色都相同”为事件 A,由图知,事件 A 包含的样本点有 3 个,故 $P(A)=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$. 记“3 个矩形颜色都不同”为事件 B,由图可知,事件 B 包含的样本点有 6 个,故 $P(B)=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

8. $\frac{2}{5}$　【解析】用 1,2,3 表示 3 个红色球,4,5 表示 2 个绿色球,用 (x,y) 表示可能的结果,x 是第一次摸到球的标号,y 是第二次摸到球的标号,则样本空间所包含的样本点有 (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),共 20 个.

其中 2 个球颜色相同的事件有(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,5),(5,4),共 8 个,故所求事件的概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

9. C　【解析】从 1,2,3,4,5 中任取 3 个不同的数共有(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5),共 10 种不同的取法. 其中的勾股

数只有(3,4,5),故 3 个数构成一组勾股数的取法只有 1 种,故所求概率为 $\frac{1}{10}$. 故选 C.

10. C 【解析】考生做多项选择题的不同结果有 A,B,C,D,AB,AC,AD,BC,BD,CD,ABC,ABD,ACD,BCD,共 14 个,该考生能得分的事件有 C,D,CD,共 3 个,所以该考生能得分的概率为 $\frac{3}{14}$. 故选 C.

11. ACD 【解析】将一枚质地均匀的正四面体骰子连续抛掷 3 次,共有 $4\times4\times4=64$(种)结果,故 A 正确;

三次都出现相同数字有 111,222,333,444,共 4 种结果,故三次都出现相同数字的概率为 $\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$,故 B 错误;

没有出现数字 1,即这 3 次抛掷出的均为 2,3,4 中的一个,共有 $3\times3\times3=27$(种),没有出现数字 1 的概率为 $\frac{27}{64}$,故 C 正确;

三个数字之和为 9 的样本点有 441,414,144,333,432,423,234,243,342,324,共 10 种,三个数字之和为 9 的概率为 $\frac{10}{64}=\frac{5}{32}$,故 D 正确. 故选 ACD.

12. A 【解析】若 $a=0$,则 $f(x)=x$,因为 $x>1$,所以 $f(x)>1$,此时只有 $b=1$ 满足 $f(x)>b$ 恒成立.

若 $a=1$,则 $f(x)=x+\frac{x}{x-1}$,因为 $x>1$,所以 $x-1>0$,

所以 $f(x)=x+\frac{x}{x-1}=x+\frac{x-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+2=4$,

当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$,即 $x=2$ 时取等号,此时 $b=1,2,3$ 满足 $f(x)>b$ 恒

成立.

若 $a=2$,则 $f(x)=x+\dfrac{2x}{x-1}$,因为 $x>1$,所以 $x-1>0$,

所以 $f(x)=x+\dfrac{2x}{x-1}=x+\dfrac{2(x-1)+2}{x-1}=x+2+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}+3\geqslant 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{2}{x-1}}+3=2\sqrt{2}+3>5$,

当且仅当 $x-1=\dfrac{2}{x-1}$,即 $x=\sqrt{2}+1$ 时取等号,此时 $b=1,2,3,4,5$ 满足 $f(x)>b$ 恒成立.

样本点 (a,b) 有 15 个,

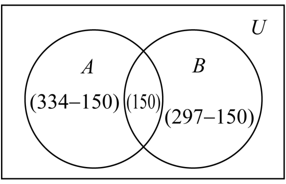
即 $(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)$.

设事件 A:"$f(x)>b$ 恒成立",则事件 A 包含的样本点有 $(0,1),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)$,共 9 个,

故 $f(x)>b$ 恒成立的概率 $P=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

故选 A.

13. 0. 038 【解析】记 500 户居民组成的集合为 U,订阅晨报的居民全体为集合 A,订阅晚报的居民全体为集合 B. 订阅晨报的有 334 户,订阅晚报的有 297 户,如图所示.



由图可知至少订阅一种报纸的有 $334+297-150=481$(户),所以两种报纸都不订阅的有 $500-481=19$(户).

故两种都不订阅的概率为 $\dfrac{19}{500}=0.038$.

14. $\dfrac{7}{8}$ 【解析】依题意,四位专家参加

调研活动共有 $2^4=16$(种)情况,只有周一或周二有专家参加调研活动的情况有 2 种,所以周一、周二都有专家参加调研活动的情况有 $16-2=14$(种),则周一、周二都有专家参加调研活动的概率为 $\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$.

15. $\frac{1}{9}$ 【解析】对于函数 $f(x)=x^2-mx+n-3$,欲使得函数在 $(2,+\infty)$ 上不单调,并且图象与 y 轴交点的纵坐标大于 1,则 $\begin{cases} n-3>1, \\ \frac{m}{2}>2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m>4, \\ n>4. \end{cases}$

由于 $m,n\in\{1,2,3,4,5,6\}$,数对 (m,n) 共有 36 个,即样本点总数为 36,满足 $m>4,n>4$ 的有 $(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)$,共 4 个,

$\therefore$ 满足函数 $f(x)=x^2-mx+n-3$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上不单调且该函数图象与 y 轴交点的纵坐标大于 1 的概率为 $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

16. $\frac{2}{5}$ 【解析】对于幂函数 $y=x^m$,当 m 为奇数时,函数 $y=x^m$ 为奇函数,

当 m 为偶数时,函数 $y=x^m$ 为偶函数.

若 a,b 是从集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 中随机选取的两个不同的数,以 (a,b) 为一个样本点,

则所有的样本点有 $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)$,共 20 个.

若函数 $f(x)=x^{3a}+x^{2b}$ 是偶函数,则 $3a,2b$ 均为偶数,则 a 必为偶数,

所以事件"函数 $f(x)=x^{3a}+x^{2b}$ 是偶函数"所包含的样本点有 $(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5)$,共 8 个,

故事件"函数 $f(x)=x^{3a}+x^{2b}$ 是偶函

数”的概率 $P=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

17.【解】(1)由题意,$(0.016+a+0.04+0.01+0.004)\times10=1$,解得 $a=0.030$,

所以平均数为 $55\times0.16+65\times0.3+75\times0.4+85\times0.1+95\times0.04=70.6$(分),

由题图可知成绩在$[50,70)$的频率为 $0.16+0.3=0.46<0.5$,$[50,80)$的频率为 $0.16+0.3+0.4=0.86>0.5$,

故中位数位于$[70,80)$之间,设中位数为 x,

由$(x-70)\times0.04+0.46=0.5$,解得 $x=71$(分),即中位数是 71,

综上,$a=0.030$,平均数为 70.6 分,中位数为 71 分.

(2)由题图可知,成绩在$[80,90)$,$[90,100]$的频率之比是 $0.1:0.04=5:2$,

故需在成绩在$[80,90)$,$[90,100]$的学生中分别抽取 5 人和 2 人,

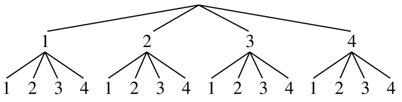
抽取的 5 人记作 a,b,c,d,e,抽取的 2 人记作 m,n,

则从这 7 人中随机选出 2 人的所有情况为 $ab,ac,ad,ae,am,an,bc,bd,be,bm,bn,cd,ce,cm,cn,de,dm,dn,em,en,mn$,共 21 种,

其中这 2 人中恰有 1 人体能优秀的情况有 $am,bm,cm,dm,em,an,bn,cn,dn,en$,共 10 种,

根据古典概型的概率计算公式,这 2 人中恰有 1 人体能为优秀的概率是$\frac{10}{21}$.

18. $\frac{3}{8}$ 【解析】画出树形图,如图所示:



由树形图可知,样本点的总数共有 16 个,

其中第一次取出的小球标号大于第

二次取出的小球标号的样本点有6个，

所以第一次取出的小球标号大于第二次取出的小球标号的概率 $P=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

课时2　频率与概率

1. C　【解析】对于A，正面向上的概率为0.5，是固定不变的，故A错误；

对于B，反面向上的概率也是0.5，是固定不变的，故B错误；

对于C，抛掷一枚硬币100次，正面向上的次数为48，根据频率的定义可知，正面向上的频率为0.48，C正确；

对于D，抛掷一枚硬币100次，正面向上的次数为48，反面向上的次数为52，根据频率的定义可知，反面向上的频率是0.52，故D错误. 故选C.

2. C　【解析】由题意，每件产品合格的概率约为 $\frac{100-5}{100}=\frac{19}{20}$，

因此合格品约有 $20\times\frac{19}{20}=19$（万件）（注意：所求为合格产品数），故选C.

3. C　【解析】由频率估计概率，则 $P(A)=\frac{55}{100}=0.55$，$P(B)=\frac{18}{100}=0.18$，$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0.55-0.18=0.27$. 故选C.

4. ACD　【解析】在A中，意味着每掷6次就可能有1次掷得点数6，故A错误；在B中，由频率的随机性知试验200次出现正面的频率不一定比100次得到的频率更接近概率，故B正确；

在C中，某地气象局预报说，明天本地下雨的概率为80%，是指明天本地有80%的可能性会下雨，故C错误；

在D中，随机事件 A,B 中至少有一个发生的概率不一定比 A,B 中恰有一个发生的概率大，如 A = 掷一枚骰子一次，向上的点数是偶数，B = 掷一枚骰子一次，向上的点数是奇数，则 A,B 中至少有一个发生的概率是1，A,B 中恰

有一个发生的概率也是 1,故 D 错误.

故选 ACD.

5. D 【解析】用频率估计概率,可知试验结果出现的概率在 30% ~ 35% 之间.

对于 A,抛一枚硬币,正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}=50\%$,A 错误;

对于 B,掷一枚正六面体的骰子,出现 1 点的概率为 $\frac{1}{6}\approx 16.7\%$,B 错误;

对于 C,从装有 2 个红球和 1 个蓝球的口袋中任取 1 个球恰好是红球的概率为 $\frac{2}{3}\approx 66.7\%$,C 错误;

对于 D,从装有 2 个红球和 1 个蓝球的口袋中任取 1 个球恰好是蓝球的概率为 $\frac{1}{3}\approx 33.3\%$,D 正确. 故选 D.

6. 【解】不一定,有可能 1 个人治愈,有可能 2 个人治愈,有可能 3 个人都治愈,也有可能 3 个人都没有治愈.

7. 【解】(1) 易知样本点总数 $n=16$,且每个样本点出现的可能性相等.

事件 A 包含的样本点有 (1,4),(2,3),(3,2),(4,1),共 4 个,

所以 $P(A)=\frac{4}{16}=0.25$.

(2) 这种游戏规则公平. 理由如下:

和为偶数的样本点有 (1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4),共 8 个,

所以甲赢的概率为 0.5,乙赢的概率也为 0.5,所以这种游戏规则公平.

8. D 【解析】对于选项 A,该教职工具有本科学历的概率 $P=\frac{75}{120}=\frac{5}{8}=62.5\%>60\%$,故错误;

对于选项 B,该教职工具有研究生学历的概率 $P=\frac{45}{120}=\frac{3}{8}=37.5\%<50\%$,故错误;

对于选项 C,该教职工的年龄在 50 岁以上的概率 $P=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}\approx 8.3\%<10\%$,故错误;

对于选项 D,该教职工的年龄在 35 岁及以上且具有研究生学历的概率 $P=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}=12.5\%>10\%$,故正确. 故选 D.

9. B 【解析】设该校共有 a 名同学,则约有 $0.4a$ 名学生近视,约有 $0.3a$ 名学生每天玩手机超过 2 h,且每天玩手机超过 2 h 的学生中近视的学生人数约为 $0.3a\times0.5=0.15a$,

所以有 $0.7a$ 名学生每天玩手机不超过 2 h,且其中有 $0.4a-0.15a=0.25a$ 名学生近视,

所以从每天玩手机不超过 2 h 的学生中任意调查一名学生,他近视的概率 $P=\frac{0.25a}{0.7a}=\frac{5}{14}$,

故选 B.

10. 8 000 【解析】根据题意,设保护区内约有 x 只这种动物,

则有 $\frac{400}{x}=\frac{25}{500}$,解得 $x=8\ 000$,

则保护区内约有 8 000 只这种动物.

11. 【解】(1) 投资项目 A 的平均利润率为 $10\%\times50\%+5\%\times40\%-5\%\times10\%=0.065$,

投资项目 B 的平均利润率为 $10\%\times40\%+5\%x-5\%y=10\%\times40\%+5\%\times[x-(60\%-x)]=10\%\times40\%+5\%\times(2x-60\%)$.

因为投资 A,B 这两个项目的平均利润率相同,

所以 $10\%\times40\%+5\%(2x-60\%)=0.065$,解得 $x=0.55$,$y=0.05$,

所以投资 A 项目不亏损的概率为 $50\%+40\%=90\%$,

投资 B 项目不亏损的概率为 $40\%+55\%=95\%$.

(2) 考查角度一:

由(1)得,投资 B 项目不亏损的概率比较大,故建议投资 B 项目.

考查角度二:

投资 A 项目利润率的方差为$(10\%-$

$6.5\%)^2\times50\%+(5\%-6.5\%)^2\times40\%+(-5\%-6.5\%)^2\times10\%=2.025\times10^{-3}$，

投资 B 项目利润率的方差为 $(10\%-6.5\%)^2\times40\%+(5\%-6.5\%)^2\times55\%+(-5\%-6.5\%)^2\times5\%=1.275\times10^{-3}$，

所以投资 A 项目利润率的方差大于投资 B 项目利润率的方差，

即投资 B 项目的利润比较稳定，因此建议投资 B 项目.

15.3　互斥事件和独立事件

课时 1　互斥事件

1. B　【解析】因为事件 A,B,C 两两互斥，所以 $P(B)=P(A+B)-P(A)=\frac{8}{15}-\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$，所以 $P(B+C)=P(B)+P(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

2. C　【解析】支付方式共有三种：现金支付，非现金支付，既用现金支付又用非现金支付，且这三种支付方式之间只能选择一种，故非现金支付的概率为 $1-0.3-0.1=0.6$. 故选 C.

3. ABD　【解析】6 张卡片中一次取出 2 张卡片的所有结果为“2 张都为红色”“2 张都为绿色”“2 张都为蓝色”“1 张为红色，1 张为绿色”“1 张为红色，1 张为蓝色”“1 张为绿色，1 张为蓝色”.

选项给出的四个事件中与“2 张卡片都为红色”互斥而不对立的事件有“2 张卡片都不是红色”“2 张卡片恰有 1 张为蓝色”“2 张卡片都为绿色”. “2 张卡片至少有 1 张为红色”包含事件“2 张卡片都为红色”，二者并不互斥.

故选 ABD.

4. ACD　【解析】对于 A，因为 $\sin x\in[-1,1]$，所以事件“若 $x\in\mathbf{R}$，则 $\sin x=\pi$”是不可能事件，故 A 正确；

对于 B，某兴趣小组有 11 人，根据必然事件的定义可知，事件“该兴趣小组中至少有 2 个人生肖相同”不是必然

事件,故 B 错误;

对于 C,分别写有数字 1,2,3,4,5 的五张白色卡片、五张黄色卡片,

从中抽取两张卡片,根据互斥事件的定义可知,

事件“两张卡片的颜色相同”和事件“两张卡片的数字相同”是互斥事件,故 C 正确;

对于 D,分别写有数字 1,2,3,4,5 的五张白色卡片、五张黄色卡片,

从中抽取两张卡片,根据互斥事件和对立事件的定义可知,

事件“两张卡片数字之和为偶数”和事件“两张卡片数字的奇偶性不相同”是互斥且对立事件,故 D 正确. 故选 ACD.

5. C 【解析】因为随机事件 A,B 互相对立,且 $P(A)=3a^2-1,P(B)=-a$,

所以$\begin{cases}P(A)+P(B)=3a^2-1-a=1,\\0<3a^2-1<1,\\0<-a<1,\end{cases}$

解得 $a=-\frac{2}{3}$,故选 C.

6. $\frac{19}{28}$ 【解析】设“甲夺得冠军”为事件 A,“乙夺得冠军”为事件 B,则 $P(A)=\frac{3}{7},P(B)=\frac{1}{4}$.

$\because A,B$ 是互斥事件,$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{7}+\frac{1}{4}=\frac{19}{28}$.

7. 0.2 【解析】由题意知 A=“摸出红球或白球”与 B=“摸出黑球”是对立事件,又$\because P(A)=0.58,\therefore P(B)=1-P(A)=0.42$. 又$\because C$=“摸出红球或黑球”与 D=“摸出白球”为对立事件,$P(C)=0.62,\therefore P(D)=0.38$. 设事件 E=“摸出红球”,则 $P(E)=1-P(B+D)=1-P(B)-P(D)=1-0.42-0.38=0.2$.

8. $\frac{4}{5}$ 【解析】记事件 C 为“3 个球中既有红球又有白球”,则它包含事件 A 和事件 B,且事件 A 与事件 B 是互斥的,所以

$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$.

9.【解】记“击中 6 环”为事件 A，“击中 7 环”为事件 B，“击中 7 环以上”为事件 C，事件 A,B,C 彼此互斥，且易知 $P(A)=0.1,P(B)=0.1,P(C)=0.6$. 记“击中环数大于 5”为事件 D，则 $P(D)=P(A+B+C)=0.1+0.1+0.6=0.8$.

10.【解】(1)“甲获胜”可看作是“和棋或乙获胜”的对立事件，所以 $P(\text{甲获胜})=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

(2)方法一：“甲不输”可看作是“甲获胜”“和棋”这两个互斥事件的并事件，所以 $P(\text{甲不输})=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

方法二：“甲不输”可看作是“乙获胜”的对立事件，所以 $P(\text{甲不输})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，故甲不输的概率为 $\frac{2}{3}$.

11.【解】(1)因为 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件，所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.95=0.05$.

(2)事件 B 与事件 C 互为对立事件，所以 $P(C)=1-P(B)=1-0.7=0.3$.

12.【解】记事件“射击一次，命中 k 环”为 $A_k(k\in\mathbf{N},7\leqslant k\leqslant 10)$，则事件 A_k 彼此互斥.

(1)记“射击一次，命中 9 环或 10 环”为事件 A，则当 A_9,A_{10} 之一发生时，事件 A 发生，由互斥事件概率加法公式得 $P(A)=P(A_9)+P(A_{10})=0.28+0.32=0.6$.

(2)设“射击一次，至少命中 8 环”的事件为 B，则当 A_8,A_9,A_{10} 之一发生时，事件 B 发生. 由互斥事件概率加法公式得 $P(B)=P(A_8)+P(A_9)+P(A_{10})=0.18+0.28+0.32=0.78$.

(3)由于事件“射击一次，命中不足 8 环”是事件 B“射击一次，至少命中 8

环”的对立事件，即 $\overline{B}$ 表示事件“射击一次，命中不足 8 环”，根据对立事件的概率公式得 $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.78=0.22$.

13.【解】从袋中任取一球，记“得到红球”“得到黑球”“得到黄球”“得到绿球”分别为事件 A,B,C,D，则事件 A,B,C,D 两两互斥.

根据题意有 $P(A)=\frac{1}{3}$，

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{12}$，

$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$，

$P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

联立方程，得

$$\begin{cases}P(B)+P(C)=\frac{5}{12},\\P(C)+P(D)=\frac{5}{12},\\P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{3},\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}P(B)=\frac{1}{4},\\P(C)=\frac{1}{6},\\P(D)=\frac{1}{4}.\end{cases}$$

所以任取一球得到黑球、黄球、绿球的概率分别是 $\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{4}$.

14. $\frac{20}{27}$ 【解析】用 a,b,c 分别表示直行，向左转和向右转，

则三辆汽车经过这个十字路口时可能出现的情况有：

$(a,a,a),(a,a,b),(a,a,c),(a,c,a),(a,c,b),(a,c,c),(a,b,a),(a,b,b),(a,b,c),(b,a,a),(b,a,b),(b,a,c),(b,c,a),(b,c,b),(b,c,c),(b,b,a),(b,b,b),(b,b,c),(c,a,a),(c,a,b),(c,a,c),(c,c,a),(c,c,b),(c,c,c),(c,b,a),(c,b,b),(c,b,c)$，共有 27 种

情况，

至少有两辆车向左转的情况有：(a,b,b)，(b,b,a)，(b,b,b)，(b,b,c)，(c,b,b)，(b,a,b)，(b,c,b)，共有 7 种情况，最多有一辆车向左转与至少有两辆车向左转互为对立事件，

故最多有一辆车向左转的概率为 $\frac{27-7}{27}=\frac{20}{27}$.

课时 2　相互独立事件

1. B　【解析】依题意 $P(A)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(C)=\frac{4}{6\times6}=\frac{1}{9}$，$P(D)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

若第一次出现 2 点，第二次出现 1 点，此时事件 A，B 均发生，所以 A 与 B 不是互斥事件，

又 $P(AB)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=P(A)P(B)$，即 A 与 B 相互独立，故 A 正确；

第一次出现 5 点，第二次出现 4 点，此时事件 C，B 均发生，所以 B 与 C 不是互斥事件，

$P(BC)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\neq P(B)P(C)$，即 B 与 C 不相互独立，故 B 错误；

$P(AC)=0\neq P(A)P(C)$，即 A 与 C 不相互独立，A 与 C 互斥，故 C 正确；

$P(AD)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=P(A)P(D)$，即 A 与 D 相互独立，第一次出现 2 点，第二次出现 1 点，

此时事件 A，D 均发生，所以 A 与 D 不是互斥事件，故 D 正确. 故选 B.

2. BCD　【解析】不放回地依次取出 2 个小球，样本点有 12，13，14，21，23，24，31，32，34，41，42，43，共 12 个，

事件 A 包含样本点 12，13，14，21，23，24，共 6 个，

事件 B 包含样本点 13，14，23，24，34，43，共 6 个，

事件 C 包含样本点 12,21,34,43,共 4 个,

事件 D 包含样本点 13,14,23,24,31,32,41,42,共 8 个,

事件 AB 包含样本点 13,14,23,24,共 4 个,

事件 AD 包含样本点 13,14,23,24,共 4 个,事件 BC 包含样本点 34,43,共 2 个,

事件 BD 包含样本点 13,14,23,24,共 4 个,

则 $P(A)=P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,$P(D)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$,

$P(AB)=P(AD)=P(BD)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,

$P(BC)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

对于 A,因为 $P(AB)\neq P(A)P(B)$,所以 A 与 B 不相互独立,则 A 错误;

对于 B,因为 $P(BC)=P(B)P(C)$,所以 B 与 C 相互独立,则 B 正确;

对于 C,因为 $P(BD)=P(B)P(D)$,所以 B 与 D 相互独立,则 C 正确;

对于 D,因为 $P(AD)=P(A)P(D)$,所以 A 与 D 相互独立,则 D 正确.

故选 BCD.

3. C 【解析】设他在第二个路口遇到红灯的概率为 p,则 $\frac{2}{3}p=\frac{2}{5}$,解得 $p=\frac{3}{5}$,∴ 他在第二个路口遇到红灯的概率为 $\frac{3}{5}$. 故选 C.

4. D 【解析】依题意,此项任务不能完成的概率为 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$,故此项任务被完成的概率为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. 故选 D.

5. A 【解析】设事件 A 表示“甲、乙两人不在同一站点下车”.

因为甲、乙两人同在 A_1 站点下车的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，

甲、乙两人同在 A_2 站点下车的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，

甲、乙两人同在 A_3 站点下车的概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，

所以甲、乙两人在同一站点下车的概率 $P(\overline{A})=3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

则 $P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. 故选 A.

6. $\frac{9}{10}$ 【解析】设“甲射击一次，命中目标”为事件 A，“乙射击一次，命中目标”为事件 B，

则“甲射击一次，未命中目标”为事件 $\overline{A}$，“乙射击一次，未命中目标”为事件 $\overline{B}$，

那么由已知条件可知 $P(A)=\frac{3}{5}$，$P(\overline{A})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，$P(B)=p$，$P(\overline{B})=1-p$，

因为甲、乙两人各射击一次得分之和为 2 有两种情形：甲命中，乙未命中；乙命中，甲未命中.

所以两人各射击一次得分之和为 2 的概率为 $\frac{3}{5}(1-p)+\frac{2}{5}p=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}p$，

所以 $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}p=\frac{9}{20}$，解得 $p=\frac{3}{4}$，

由两人各射击一次得分之和不少于 2 的对立事件是两人各射击一次得分之和为 0，

由两人各射击一次得分之和为 0 的概率为 $P(\overline{A})\times P(\overline{B})=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{10}$，

得两人各射击一次得分之和不少于 2 的概率为 $1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

7. $\frac{1}{3}$　$\frac{1}{2}$ 【解析】由题意，从 1，2，3，4 四个数中，随机地选取两个数，且数的

选取是不放回的，则样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$，$n(\Omega)=12$. 其中两个数的和为偶数的样本点有 4 个，所以两个数的和为偶数的概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

若数的选取是有放回的，则两次选取是相互独立的，两个数的和为偶数的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

8. $\frac{29}{72}$ 【解析】分两种情况讨论：

(1)第一局甲胜，第二局乙胜：

第一局甲执黑子先下的概率为 $\frac{1}{2}$，则甲胜第一局的概率为 $\frac{1}{3}$，第二局乙执黑子先下，则乙胜的概率为 $\frac{1}{2}$；

第一局乙执黑子先下的概率为 $\frac{1}{2}$，则甲胜第一局的概率为 $\frac{1}{2}$，第二局乙执黑子先下，则乙胜的概率为 $\frac{1}{2}$，

所以第一局甲胜，第二局乙胜的概率 $P_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$.

(2)第一局乙胜，第二局甲胜：

第一局甲执黑子先下的概率为 $\frac{1}{2}$，则乙胜第一局的概率为 $\frac{2}{3}$，第二局甲执黑子先下，则甲胜的概率为 $\frac{1}{3}$；

第一局乙执黑子先下的概率为 $\frac{1}{2}$，则乙胜第一局的概率为 $\frac{1}{2}$，第二局甲执黑子先下，则甲胜的概率为 $\frac{1}{3}$，

所以第一局乙胜，第二局甲胜的概率 $P_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{36}$.

综上所述，甲、乙各胜一局的概率为

$\frac{5}{24}+\frac{7}{36}=\frac{29}{72}$.

9. $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　【解析】由题意得

$$\begin{cases}P(A)P(B)=\frac{1}{6},\\ P(\overline{B})P(C)=\frac{1}{8},\\ P(A)P(B)P(\overline{C})=\frac{1}{8},\end{cases}$$

解得 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$.

所以 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

10.【解】(1)设"考生填空题得满分"为事件 A，则考生填空题得满分的概率 $P(A)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

(2)设"考生填空题得 15 分"为事件 B，"考生填空题得 10 分"为事件 C.

$\because$ 考生填空题得 10 分与得 15 分的概率相等，

$\therefore P(B)=P(C)$，

$\therefore p\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+(1-p)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+(1-p)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=p\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+(1-p)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+p\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}$，解得 $p=\frac{2}{3}$.

11.【解】(1)设 A="任选 2 道灯谜，甲都猜对"，用 1,2,3,4,5 表示第一关的 5 道灯谜，其中 1,2,3,4 表示甲猜对的 4 道，

则样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$，$A=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$，所以 $n(\Omega)=10$，$n(A)=6$，根据古典概型概率的计算公式，得 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{5}$.

(2)设 B="任选 1 道灯谜，甲猜对"，C="任选 1 道灯谜，乙猜对"，D="任

选 1 道灯谜，甲、乙两人恰有一个人猜对”，

根据题意可得，$P(B)=\frac{12}{20}$，$P(\overline{B})=\frac{8}{20}$，$P(C)=\frac{15}{20}$，$P(\overline{C})=\frac{5}{20}$.

因为 $D=\overline{B}C\cup B\overline{C}$，且 $\overline{B}C$，$B\overline{C}$ 互斥，又甲、乙两位选手独立参加竞猜，所以 B，C 相互独立，从而 $\overline{B}$，C 相互独立，B，$\overline{C}$ 也相互独立.

所以 $P(D)=P(\overline{B}C\cup B\overline{C})=P(\overline{B}C)+P(B\overline{C})=P(\overline{B})P(C)+P(B)P(\overline{C})=\frac{8}{20}\times\frac{15}{20}+\frac{12}{20}\times\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$.

即甲、乙两人恰有一个人猜对的概率为$\frac{9}{20}$.

12. $\frac{88}{625}$ **【解析】**两人最后获得奖品价值总和为 300 元的情况有：甲获得的奖品价值 100 元且乙获得的奖品价值 200 元，或甲获得的奖品价值 200 元且乙获得的奖品价值 100 元，

即甲答对两题且乙答对三题，或甲答对三题且乙答对两题.

又每位顾客答对两题的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{25}$，

每位顾客答对三题的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$，

所以两人最后获得的奖品价值总和为 300 元的概率为$\frac{11}{25}\times\frac{4}{25}\times2=\frac{88}{625}$.